Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Problemas de extensão relacionados ao Laplaciano Fracionário e Aplicações

Jonison Lucas dos Santos Carvalho

São Cristóvão – SE
Dezembro de 2016

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Problema de Extensão Relacionado ao Laplaciano Fracionário e Aplicações

por

Jonison Lucas dos Santos Carvalho

sob a orientação do

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso

e do

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres

São Cristóvão – SE
Dezembro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Carvalho, Jonison Lucas dos Santos
C331p Problemas de extensão relacionados ao Laplaciano fracionário e aplicações / Jonison Lucas dos Santos Carvalho ; orientador Jose Anderson Valença Cardoso. – São Cristóvão, SE, 2016.
58 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Schrodinger, Equação de. 4. Dirichlet, Problemas. 5. Funções harmônicas. 6. Diferenças finitas. I. Cardoso, Jose Anderson Valença, orient. II. Título.

CDU 517.95

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Problemas de Extensão Relacionados ao Laplaciano Fracionário e Aplicações

por

Jonison Lucas dos Santos Carvalho

Aprovada pela banca examinadora:

Jose Anderson Valença Cardoso

Prof. Dr. Jose Anderson Valença Cardoso- UFS
Orientador

Marcelo Fernandes de Almeida

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida- UFS
Primeiro Examinador

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo- UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 05 de Dezembro de 2016

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Resumo

A positividade do operador Laplaciano permite a definição de sua raiz quadrada e esta se relaciona diretamente ao problema de extensão harmônica no semi-espaço superior, como um operador que leva a condição de contorno de Dirichlet à condição de Neumann. Neste trabalho, baseado nos resultados desenvolvidos por Caffarelli e Silvestre em [8], obtemos caracterização semelhante para o operador Laplaciano Fracionário. Além disso, aplicamos a caracterização referida ao estudo de existência de solução não-trivial da equação de Schrödinger fracionária não-linear.

Palavras-chave: Laplaciano fracionário, Equação de Schrödinger, Condição de Dirichlet, Condição de Neumann, Semi-espaço, Extensão harmônica.

Abstract

The Laplacian operator positivity allows its square roots definition and this relates directly to the problem of harmonious extension in the superior semi-space, like an operator that takes the condition from Dirichlet's outline to the Neumann's condition. In this work, that was based on results developed by Caffareli and Silvestre [8], we got similar characterization for the Fractional Laplacian Operator. In addition, we apply the characterization reported to the sdudy of existence of non-trivial solution of the non-linear fractional Schrodinger equation.

Keywords: Fractional Laplacian, Schrodinger Equation, Dirichlet Condition, Neumann's condition, Semi-space, Harmonious extension.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, tem sido publicado uma grande quantidade de trabalhos relacionados as questões de existência e regularidade para operadores com "difusão fracionária". O protótipo é o Laplaciano Fracionário que definiremos na Seção 1.1. A literatura para essa classe de problemas tem crescido bastante, devido ao fato desse tipo de problema está relacionado ao modelamento de preços do American Option, um importante tema de pesquisa em Economia. Além disto, esse tipo de operador está relacionado a vários modelos que aparecem em estocástico, física, engenharias, logística, dinâmica de populações e muitos belos trabalhos nesse tema de pesquisa foram publicados na última década. Um importante trabalho que ajudou bastante o desenvolvimento da teoria foi devido a Caffarelli e Silvestre [8] que, usando ideias que aparecem em [7, 16], mostraram que existe uma estreita relação entre o Laplaciano Fracionário e uma equação local na forma divergente. Já havia sido observado por Caffarelli [7] a relação entre a solução u do problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = \operatorname{div}(\nabla u(x,y)) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

com o operador $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, a saber,

$$-u_y(x,0) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} f(x). \tag{2}$$

Neste trabalho estudaremos o resultado obtido por Caffarelli e Silvestre [8], onde é estabelecida a relação

$$\lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = C_{N,s}(-\Delta)^s f,$$

com $s = (1-a)/2$ e $a \in (-1,1)$, sendo u solução de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x,y)) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e $C_{N,s}$ é uma determinada constante de normalização. Note que se $a = 0$, recaímos no caso clássico anterior (1) e (2).

Como o Laplaciano Fracionário é um operador não-local com uma teoria pouco desenvolvida, neste trabalho tal operador será relacionado com um operador local com uma teoria mais desenvolvida. A partir dessa técnica, podemos obter muitas propriedades relacionadas ao Laplaciano Fracionário. Por exemplo, Caffarelli e Silvestre no mesmo trabalho provam a Desigualdades de Harnack e fórmulas de monotonicidade. Em dois trabalhos bem conhecidos Cabré e Sire em [4, 5], usando essa mesma técnica, mostram regularidade e princípio do máximo, existência e unicidade de soluções para problemas semilineares envolvendo o Laplaciano Fracionário. Por sua vez Fall e Jarohs [12] obtiveram resultados do tipo Serrin para equações envolvendo o Laplaciano Fracionário. No que diz respeito ao cálculo das variações este resultado foi utilizado amplamente para tratar da existência de solução para equações envolvendo Laplaciano Fracionário. Neste trabalho, apresentamos um resultado relacionado com os resultados obtidos por Alves e Miyagaki [1], onde eles garantem, a existência de solução não-trivial para a equação

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = |u|^{p-1}u,$$

onde $2 \leq p < 2_s^* - 1$, sendo $2_s^* = 2N/(N-2s)$. Essa equação é conhecida como equação de Schrödinger Fracionária, e vem ganhando bastante destaque nos últimos anos devido a sua aplicação na Mecânica Quântica Fracionária [13]. A seguir, apresentamos brevemente o que discutiremos em cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 1, abordaremos inicialmente o problema

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

com $N \geq 3$. Este problema servirá de motivação para um caso mais geral, a saber

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}_+^{N+1}. \tag{3}$$

Em seguida, relacionaremos pontos de mínimo do funcional energia

$$J_a(u) = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^a |\nabla u|^2 dX,$$

com soluções do problema (3). Na Seção 1.1 será definido os espaços de Sobolev Fracionários e o operador $(-\Delta)^s$ Laplaciano Fracionário. Além disso, vários resultados clássicos serão apresentados, que mostram relações entre o operador $(-\Delta)^s$ e a Transformada de Fourier, e também que envolvem normas dos espaços de Sobolev. Finalizaremos o capítulo com o estudo do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi''(y) + \frac{a}{y}\phi'(y) - \phi(y) = 0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim_{y \to \infty} \phi(y) = 0, \end{cases}$$

o qual será utilizado no decorrer do texto.

No Capítulo 2, estudaremos a relação entre uma solução u do problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x,y)) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4}$$

onde $a \in (-1,1)$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, com o operador $(-\Delta)^s$. Para isso, utilizaremos dois métodos, sendo um via fórmula de Poisson e outro via transformada de Fourier.

Em relação ao método via fórmula de Poisson, obteremos inicialmente uma solução u de (4). Em seguida, trataremos da unicidade de solução e em seguida provaremos a seguinte relação:

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x),$$

com u solução de (4) e $C = -\left(1/(1-a)\right)^{-a} K$.

No método utilizando a Transformada de Fourier, primeiramente chegaremos na seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \int_{\mathbb{R}^N} C|\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Tal igualdade será a principal ferramenta para concluir que

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x),$$

onde $C = \Psi(\phi)$, ϕ mínimo de Ψ. Sendo que $\Psi(\phi)$ é dado por

$$\Psi(\phi) = \int_0^\infty \left(|\phi|^2 + |\phi'|^2\right) y^a dy.$$

No Capítulo 3, inicialmente mostraremos que se u é solução de (4) tal que $y^a|\nabla u|^2$ é localmente integrável e, para $|x| \leq R$,

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = 0,$$

então a extensão

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{se} \quad y \geq 0, \\ u(x,-y), & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

é solução fraca de

$$\operatorname{div}(|y|^a \nabla u) = 0$$

na bola $(N+1)$ dimensional $B_R = \left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : |x|^2 + |y|^2 \leq R^2\right\}$. Este é o caso divergente. Em seguida será feito o caso não-divergente. Assim, dada uma função contínua g sobre ∂B_R, de modo que g seja simétrica, existe uma única função $u \in C(\overline{B_R})$ tal que:

i) u resolve a equação $u_{xx} + |z|^\alpha u_{zz} = 0$ em $B_R \cap \{z \neq 0\}$;

ii) $u \in C^1(B_R)$;

iii) $u_z(x, 0) = 0$.

Será provada a Desigualdade de Harnack para uma função f não negativa, sob a hipótese de que $(-\Delta)^s f = 0$, em B_r, isto é, encontraremos uma constante C que depende somente de s e da dimensão N, tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} f \leq C \sup_{B_{\frac{r}{2}}} f.$$

Encerraremos o capítulo com a seção referente a Fórmulas de Monotonicidade. Provaremos nessa seção que se u resolve (3) em

$$B(0, R_0)^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : |x|^2 + y^2 < R_0 \ \ e \ \ y > 0\},$$

e se para todo $x \in B(0, R_0)^+$

$$u_z(x, 0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{y \to 0} y^a u_y(x, y) = 0,$$

então

$$\Phi(R) = R \frac{\int_{B(0,R)^+} |\nabla u|^2 y^a dX}{\int_{\partial B(0,R)^+} |u|^2 y^a d\sigma}$$

é monótona não-decrescente para todo $R < R_0$. E com isso teremos que a função Φ é constante, se somente se, u é homogênea.

Como aplicação das relações obtidas no Teorema 2.1, no Capítulo 4 estudaremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N), \quad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5}$$

$0 < s < 1$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $2 < p < 2N/(N - 2s)$, $N \geq 3$. A igualdade de (5) é conhecida como equação de Schrödinger não-linear fracionária. Faremos uso do Teorema do Passo da Montanha para encontrar uma solução não-trivial de (5).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas e desenvolvidas ferramentas básicas que serão utilizadas ao longo do trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev e o Laplaciano Fracionário

Nesta seção apresentamos os espaços de Sobolev fracionários. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aberto e conexo, para cada $s \in (0,1)$, o espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$H^s(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} := \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega} + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

O termo

$$[f]_{H^s(\Omega)} := \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

é chamado (semi)norma de Gagliardo.

Teorema 1.1. *Seja $0 < s \leq s' < 1$. Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{s'}(\Omega)}$$

com $C = C(N,s) \geq 1$ uma constante positiva. Em particular,

$$H^{s'}(\Omega) \subset H^s(\Omega).$$

Demonstração. Ver [10, Proposição 2.1]. $\square$

O próximo teorema mostra que o Teorema 1.1 é válido para $s' = 1$, mas há necessidade que a fronteira de Ω seja regular.

Teorema 1.2. *Seja $s \in (0,1)$. Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}$$

para alguma constante positiva $C = C(N,s) \geq 1$. Em particular,

$$H^1(\Omega) \subset H^s(\Omega).$$

Demonstração. Ver [10, Proposição 2.2]. □

Teorema 1.3. *Seja $s \in (0,1)$ tal que $2s < N$. Então existe uma constante positiva $C = C(N,s) > 0$ tal que, para toda função mensurável e de suporte compacto $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tem-se*

$$\|f\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy,$$

onde $2^* = 2N/(N-2s)$ é chamado de "expoente crítico fracionário".

Demonstração. Ver [10, Teorema 6.5]. □

Como no caso clássico com s sendo inteiro, qualquer função no espaço fracionário de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ pode ser aproximada por uma sequência de funções suaves com suporte compacto.

Teorema 1.4. *Para todo $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ das funções suaves de suporte compacto é denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Veja [14, Teorema 7.38] □

Uma outra forma de definir o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ é via transformada de Fourier. Primeiramente consideramos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ cujo elementos são funções de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ com decaimento "rápido no infinito", que equivalentemente, podemos escrever

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|)^k \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad k = 0,1,2,\cdots \right\}.$$

A topologia desse espaço é gerado pelas seminormas

$$p_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|)^k \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

onde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Para funções $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a Transformada de Fourier está bem definida e é dada por

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x}\varphi(x)dx.$$

Agora, precisamente, pode-se definir

$$\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s})(\mathcal{F}(f)(\xi))^2 d\xi < \infty \right\}.$$

Observe que a definição anterior, ao contrário da que usa a norma de Gagliardo (1.2), é válida também para $s \geq 1$.

O espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ está estritamente relacionado com o operador Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$, onde para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $s \in (0,1)$, $(-\Delta)^s$ é definido por

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s f(x) &= C(N,s) P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \qquad (1.4) \\ &= C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \end{aligned}$$

onde $P.V.$ é uma abreviação usual para "no sentido de valor principal"(como definido em (1.4)) e $C(N,s)$ é uma constante dimensional que depende de N e s, precisamente dada por

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1 - cos\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1}.$$

No teorema seguinte verifica-se que é possível escrever a integral em (1.4) de outra forma.

Teorema 1.5. *Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s$ o operador Laplaciano Fracionário. Então, para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*

$$(-\Delta)^s f(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(f(x+y) + f(x-y) - 2f(x))}{|y|^{N+2s}} dy, \quad para \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

Demonstração. Ver [10, Lema 3.2]. □

Teorema 1.6. *Seja $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ o operador Laplaciano Fracionário. Então para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tem-se*

$$(-\Delta)^s f(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}f(\xi))), \quad para \quad todo \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Ver [10, Proposição 3.3]. □

A equivalência dos espaço $\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N)$ e $H^s(\mathbb{R}^N)$ é estabelecida pelo próximo teorema.

Teorema 1.7. *Seja $s \in (0,1)$. Então o Espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ coincide com o espaço $\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, para todo $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$*

$$[f]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

Demonstração. Ver [10, Proposição 3.4]. □

Finalmente no próximo teorema conclui-se a relação entre o Laplaciano Fracionário e o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.8. *Sejam $s \in (0,1)$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$[f]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1}\|(-\Delta)^{s/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Ver [10, Proposição 3.6]. □

Funcional Energia da Transformada de Fourier

Aproveitando os estudos desta seção, vamos finalizar esta seção com um funcional energia que será ultilizado à frente: $\Phi : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.5}$$

É importante observar que com cálculos simples verifica-se que o funcional (1.5) é de classe C^1 e tem como derivada

$$\Phi'(f)(h) = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi)d\xi. \tag{1.6}$$

De fato

$$\Phi'(f)(h) = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(f+th)-\Phi(f)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\left(|\widehat{(f+th)}(\xi)|^2 - |\widehat{f}(\xi)|^2\right)d\xi$$

Prosseguindo com o cálculo, temos

$$\Phi'(f)(h) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\left(|\widehat{f}(\xi)|^2 + 2t\widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi) + t^2|\widehat{h}(\xi)|^2 - |\widehat{f}(\xi)|^2\right)d\xi$$

Portanto

$$\Phi'(f)(h) = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi)d\xi,$$

conforme destacado em (1.6).

1.2 Soluções Fundamentais

Na presente seção o objetivo é apresentar a caracterização de soluções da equação

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0. \tag{1.7}$$

O primeiro passo é encontrar a solução fundamental e em seguida obter uma fórmula de Poisson para a solução. Na seção seguinte associamos as soluções de (1.7) com os pontos críticos de um funcional energia.

Para motivar as definições e tornar a leitura mais natural, abordaremos as mesmas questões inicialmente para a equação de Laplace. Considere a função $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} \tag{1.8}$$

onde $N \geq 3$ e ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Fazemos questão de demonstrar o próximo teorema, pois embora clássico, o *modus operandi* da demostração será adaptado para o caso de interesse e a comparação das provas permite uma clareza maior da leitura.

Teorema 1.9. *A função ϕ definida em* (1.8) *satisfaz*

$$\Delta \phi = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{1.9}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\phi_{x_i} &= \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \frac{(2-N)}{2} \left(x_1^2 + \ldots + x_N^2\right)^{\frac{-N}{2}} 2x_i \\
&= \frac{-x_i}{N\omega_N} \left(x_1^2 + \ldots + x_N^2\right)^{\frac{-N}{2}}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi_{x_i x_i} &= \frac{-1}{N\omega_N} \left[(x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{-N}{2}} + x_i (\frac{-N}{2})(x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{-N-2}{2}} 2x_i \right] \\
&= \frac{-1}{N\omega_N} \left[(x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{-N}{2}} - N x_i^2 (x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{-N-2}{2}} \right] \\
&= \frac{-1}{N\omega_N} \left[\frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_i^2}{|x|^{N+2}} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta \phi = \sum_{i=1}^N \phi_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{-1}{N\omega_N} \left[\frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_i^2}{|x|^{N+2}} \right] = \frac{-N}{N\omega_N |x|^N} + \frac{N|x|^2}{N\omega_N |x|^{N+2}} = 0.$$

$\square$

A função ϕ definida em (1.8) é conhecida na literatura clássica por *solução fundamental do Laplaciano.* Para a discussão na sequência, é interessante observar que a igualdade (1.9) é equivalente a

$$\operatorname{div}(\nabla\phi) = 0. \tag{1.10}$$

Como nosso objetivo é estudar a equação (1.7), observe inicialmente que se $a = 0$ em (1.7), torna-se o caso clássico (1.10). Dessa forma, considerando a notação $X = (x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ onde $x \in \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, e $y \in \mathbb{R}$, inspirados por (1.8), somos motivados intuitivamente a conjecturar que a função $\varphi : \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(X) = \frac{1}{(N+1)(N-1)\omega_{N+1}} \frac{1}{|X|^{N-1+a}},$$

pode se relacionar à equação (1.7). Note que no caso $a = 0$, tem-se (1.8) para $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{(0,0)\}$.

No próximo resultado vamos seguir como na prova do Teorema 1.9 e confirmar a eurística referida.

Teorema 1.10. *Seja $u : \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(X) = K|X|^{1-N-a},$$

onde $K > 0$ é uma constante que depende somente de N (chamada Constante de Normalização) e $a \in (-1,1)$. Temos que u é solução da equação

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{(x,0)\}.$$

Demonstração. Note que

$$u_{x_i} = K\frac{(1-N-a)}{2} 2x_i \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + y^2 \right)^{\frac{-1-N-a}{2}} = K(1-N-a)x_i|X|^{-1-N-a}.$$

Assim

$$u_{x_i x_i} = K(1-N-a)|X|^{-1-N-a} + K(1-N-a)(-1-N-a)x_i^2|X|^{-3-N-a},$$

então

$$\Delta_x u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i} = |x|^2 K(1-N-a)(-1-N-a)|X|^{-3-N-a} + NK(1-N-a)|X|^{-1-N-a},$$

onde $|x|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$. Por outro lado, temos

$$\frac{a}{y} u_y = \frac{a}{y} \frac{(1-N-a)}{2} K(|x|^2 + y^2)^{\frac{-1-N-a}{2}} 2y = a(1-N-a)K|X|^{-1-N-a}$$

e

$$u_{yy} = K(1-N-a)|X|^{-1-N-a} + K(1-N-a)y^2(-1-N-a)|X|^{-3-N-a}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} &= |x|^2K(1-N-a)(-1-N-a)|X|^{-3-N-a}\\
&+NK(1-N-a)|X|^{-1-N-a}\\
&+a(1-N-a)K|X|^{-1-N-a} + K(1-N-a)|X|^{-1-N-a}\\
&+K(1-N-a)y^2(-1-N-a)|X|^{-3-N-a}.
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos com mesmos expoentes, respectivamente, ficamos com

$$\begin{aligned}
\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} &= K(1-N-a)|X|^{-1-N-a}(N+a+1)\\
&+K(1-N-a)(-1-N-a)|X|^{-3-N-a}(|x|^2+y^2)\\
&= K(1-N-a)|X|^{-1-N-a}(N+a+1)\\
&+K(1-N-a)(-1-N-a)|X|^{-3-N-a}|X|^2\\
&= K(1-N-a)|X|^{-1-N-a}(N+a+1-1-N-a)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

1.3 Funcionais Energia

Nesta seção, o principal objetivo é caracterizar as soluções da equação

$$\operatorname{div}(y^a\nabla u) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{1.11}$$

como pontos de mínimo de um funcional energia, conforme indicado na Seção 1.2. A caracterização nos permitirá aplicar técnicas relacionadas ao cálculo das variações a fim de obter uma relação entre o Laplaciano Fracionário e soluções de (1.11) de forma bastante natural. Conforme desenvolvimento da Seção 1.2, como motivação eurística, trataremos primeiro o caso do Laplaciano, ou seja, a equação

$$\operatorname{div}(\nabla\phi) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}. \tag{1.12}$$

Note que há semelhança entre (1.11) com (1.12), desde que $a = 0$. No teorema a seguir, apresentaremos o clássico princípio de Dirichlet.

Teorema 1.11. *Considere o seguinte problema*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta u = 0 & em & \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & em & \mathbb{R}^N \end{array}\right. \tag{1.13}$$

onde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Seja*

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+) : w(x,0) = f(x) \quad em \quad \mathbb{R}^N \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX < \infty\}$$

o conjunto das funções admissíveis. Então, $u \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+, \mathbb{R})$ *é solução de* (1.13) *se, e somente se, é mínimo do funcional* $J : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX.$$

Demonstração. Seja u solução de (1.13) e $w \in \mathcal{A}$. Mostraremos que u é mínimo de J. Com efeito, note que da primeira igualdade de (1.13), tem-se

$$\Delta u(u-w) = 0.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Delta u(u-w) dX = 0.$$

Pelo Teorema de Green

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Delta u(u-w) dX = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla u \nabla (u-w) dX + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial \nu}(u-w) dx.$$

Desde que $u = w$ em $\mathbb{R}^N$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \nabla u \nabla (u-w) dX = 0.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla u \nabla w dX. \tag{1.14}$$

Pelas Desigualdades de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla u \nabla w dX \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla w|^2 dX \right)^{1/2}. \tag{1.15}$$

Consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla u \nabla w dX \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla w|^2 dX. \tag{1.16}$$

Aplicando (1.16) em (1.14), tem-se

$$J(u) \leq J(w).$$

Provaremos agora a recíproca. Seja u mínimo de J. Considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = J(u + t\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left(|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla \varphi + t^2 |\nabla \varphi^2|\right) dX.$$

Observe que g está bem definida, uma vez que φ tem suporte compacto. Derivando g em relação a t, temos

$$g'(t) = 2\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla u \nabla \varphi dX + 2t \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla \varphi|^2 dX.$$

Como u é mínimo de J, então 0 é ponto crítico de g. Dessa maneira $g'(0) = 0$, implicando assim que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla u \nabla \varphi dX = 0.$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Delta u \varphi dX = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla u \nabla \varphi dX = 0.$$

Com isso u resolve (1.13). $\square$

Corolário 1.12. *Se uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R})$ é ponto crítico de J então resolve* (1.12).

Demonstração. Note que, dado $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ tem-se

$$\begin{aligned} J'(u)(h) &= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (|\nabla(u+th)|^2 - |\nabla u|^2) dX \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla h + t^2 |\nabla h|^2) - |\nabla u|^2) dX \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \nabla u \nabla h dX. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Observe que o suporte de h está contido em B_r, para algum $r > 0$, onde B_r é a bola de centro 0 e raio r. Por outro lado, pelo Teorema de Green

$$\int_{Br} \nabla u \nabla h dX = \left(-\int_{Br} \Delta u h dX + \int_{\partial Br} \frac{\partial u}{\partial \mu} h dS \right).$$

Dessa forma

$$\int_{Br} \nabla u \nabla h dX = -\int_{Br} \Delta u h dX. \tag{1.18}$$

Fazendo $r \to \infty$ em (1.18), obtemos a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \nabla u \nabla h dX = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Delta u h dX. \tag{1.19}$$

De (1.19) concluímos a demonstração. $\square$

Motivado pelo Teorema 1.11, para cada $a \in (-1,1)$, consideremos o funcional $J_a : C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_a(u) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a |\nabla u|^2 dX.$$

Note que J_a torna-se J, quando consideramos $a = 0$, o que estabelece um certo paralelo entre o caso da equação de Laplace e (1.11). Seguindo os passos da demonstração do Teorema 1.11 mostraremos:

Teorema 1.13. *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x,y)) = 0 & em \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & em \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.20}$$

onde $a \in (-1,1)$ *e* $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$*. Seja*

$$\mathcal{B} = \{w \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+) : w(x,0) = f(x) \quad em \quad \mathbb{R}^N\}.$$

Então u *é solução de* (1.20) *se, e somente se, é mínimo de* J_a*, para cada* $a \in (-1,1)$.

Demonstração. A demonstração é análoga a do Teorema 1.11. Por esse motivo, omitiremos a prova. $\square$

Corolário 1.14. *Se a função* $u : \mathbb{R}^{N+1}_+ \to \mathbb{R}$ *é ponto crítico de* J_a *então é solução de* (1.11).

Demonstração. Seja $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, então

$$\begin{aligned} J_a'(u)(h) &= \lim_{t\to 0} \frac{J_a(u+th) - J_a(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \left(|\nabla(u+th)|^2 - |\nabla u|^2\right) dX \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \left(|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla h + t^2|\nabla h|^2 - |\nabla u|^2\right) dX \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Note que o suporte de h está contido em B_r, para algum $r > 0$. Através do Teorema de Green, obtemos

$$\int_{B_r \cap \mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX = -\int_{B_r \cap \mathbb{R}^{N+1}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u) h dX + \int_{\partial B_r \cap \mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u h dS. \tag{1.22}$$

Fazendo $r \to \infty$ em 1.22, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u) h dX.$$

Assim se u é ponto crítico de J_a, concluimos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u) h dX. \tag{1.23}$$

De (1.23) u é solução de (1.11). □

1.4 Problema de Valor Inicial

Nesta seção vamos estudar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi''(y) + \frac{a}{y}\phi'(y) - \lambda\phi(y) = 0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim\limits_{y\to\infty} \phi(y) = 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

onde $a \in (-1, 1)$ e $\lambda > 0$, o qual será ultilizado no decorrer do trabalho.

Teorema 1.15. *O problema de valor inicial* (1.24) *tem uma única solução.*

Demonstração. Para garantir a existência de solução para o problema (1.24), consideremos o espaço vetorial

$$X = \left\{ \phi \in H^1((0,\infty)) : \int_0^\infty \left(\lambda|\phi|^2 + |\phi'|^2\right) y^a dy < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|\phi\|^2 = \int_0^\infty \left(\lambda|\phi|^2 + |\phi^{'}|^2\right) y^a dy.$$

Esta norma provém do produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^\infty \left(\lambda\phi\psi + \phi^{'}\psi^{'}\right) y^a dy,$$

o que torna X um espaço de Hilbert. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínuo e

$$\langle \phi, \phi \rangle \geq \alpha\|\phi\|^2,$$

para $\alpha = 1$. Temos assim que $\langle \phi, \psi \rangle$ é coerciva. Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, tem-se que existe uma única $\phi \in X$ tal que

$$\|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2, \quad \forall\ \psi \in X. \tag{1.25}$$

Considere o funcional $\Psi : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(\phi) = \int_0^\infty \left(\lambda|\phi|^2 + |\phi^{'}|^2\right) y^a dy. \tag{1.26}$$

Por (1.25), o funcional Ψ possui uma única ϕ minimizante. Logo, dado $h \in C_0^\infty(0,\infty)$

$$\Psi'(\phi)(h) = \int_0^\infty \left(\lambda\phi h + \phi^{'} h^{'}\right) y^a dy = 0. \tag{1.27}$$

Fazendo integração por partes em

$$\int_0^\infty \phi^{'} h^{'} y^a dy,$$

com $\tilde{u} = \phi' y^a$ e $d\tilde{v} = h' dy$, segue que

$$\int_0^\infty \phi' h' y^a dy = \phi^{'} h y^a \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\phi^{''} h y^a + \phi^{'} h a y^{a-1}\right) dy. \tag{1.28}$$

Combinando (1.27) com (1.28), tem-se

$$\int_0^\infty \left(\lambda\phi y^a - \phi^{'} a y^{a-1} - \phi^{''} y^a\right) h dy + \phi^{'} h y^a \Big|_0^\infty = 0. \tag{1.29}$$

Note que

$$\phi^{'} h y^a \Big|_0^\infty = 0,$$

pois h tem suporte compacto. Sendo assim, por (1.29) temos que ϕ resolve (1.24).

$\square$

Observação 1.1. *Explicitamente a solução de* (1.24) *é dada por:*

$$\phi(y) = C_1 y^{(1-a)/2} K_{\frac{(a-1)}{2}}(\sqrt{\lambda} y).$$

Onde

$$K_{\frac{(a-1)}{2}}(\sqrt{\lambda} y) = \frac{1}{2}\left(\csc\left(\frac{\pi(a-1)}{2}\right)\left(I_{-\frac{(a-1)}{2}}(\sqrt{\lambda} y) - I_{\frac{(a-1)}{2}}(\sqrt{\lambda} y)\right)\right)\pi$$

e

$$I_\alpha(\sqrt{\lambda} y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\sqrt{\lambda} y \cos t} \cos(|\alpha| t) dt.$$

Além disso, C_1 é tomada de tal forma que $\phi(0) = 1$. Por fim

$$\lim_{y\to\infty} \phi(y) = 0,$$

sendo que tal cálculo foi feito com o auxílio do programa Maple.

Capítulo 2

Problema de Extensão e o Laplaciano Fracionário

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x,y)) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a \in (-1,1)$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Neste capítulo nosso objetivo é estudar a relação existente entre o problema (2.1) com o Laplaciano Fracionário

$$(-\Delta)^s f(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}(f))(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < s < 1.$$

É comum dizer que uma solução de (2.1) é uma extensão $s-$harmônica.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1. *Para cada $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, existe uma única solução $u : \mathbb{R}^{N+1}_+ \to \mathbb{R}$ de* (2.1) *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \sqrt{K_a} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \tag{2.2}$$

e

$$\left(\frac{1}{1-a}\right)^a \lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = u_z(x,0) = -\frac{1}{K_a}(-\Delta)^s f(x), \tag{2.3}$$

onde $s = (1-a)/2$ e $K_a = 2^a \Gamma(\frac{3-a}{2})/\Gamma(\frac{1-a}{2})$ e Γ é a função de Bessel, a saber

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^t s^{t-2} dt.$$

Observação 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \cos(x) + \cos(y).$$

Através de um cálculo direto, tem-se que as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$u(x,y,z) = e^z(\cos(x) + \cos(y))$$

e

$$v(x,y,z) = e^{-z}(\cos(x) + \cos(y))$$

satisfazem (2.1) *para o caso em que* $a = 0$ *e* $N = 2$. *Mas este exemplo não contraria a unicidade do Teorema 2.1, uma vez que a solução* u *não cumpre a condição de integrabilidade* (2.2).

Observação 2.2. *É importante ressaltar nesse caso que a notação* $u_z(x,0)$ *em* (2.3) *deve ser entendida como*

$$u_z(x,0) = \lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0}\frac{u(x,y+z) - u(x,y)}{z}.$$

2.1 Extensão Via Fórmula de Poisson

O objetivo desta seção é provar a parte da existência do Teorema 2.1 usando núcleo de Poisson. Com um cálculo direto na primeira igualdade de (2.1), obtém-se para uma solução $u : \mathbb{R}^{N+1}_+ \to \mathbb{R}$ a equação

$$\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{2.4}$$

onde $a \in (-1,1)$. Com efeito

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y},$$

onde

$$F_i = y^a u_{x_i}$$

e

$$G = y^a u_y.$$

Com isso

$$0 = \operatorname{div}(y^a\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} y^a u_{x_i x_i} + a y^{a-1}u_y + y^a u_{yy}.$$

Portanto, obtemos (2.4). Fazendo agora a mudança de variável $z = (y/(1-a))^{1-a}$, de forma que

$$y = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}},$$

obtemos a equação equivalente a (2.4)

$$\Delta_x u + z^{\alpha}u_{zz} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{2.5}$$

Onde $\alpha = -2a/(1-a)$, isto é, desenvolvendo as contas ao aplicar a mudança de variável em (2.4), obtemos a equação da forma não divergente (2.5) equivalente a

(2.4). Além disso, usando a mudança de variável $z = (y/(1-a))^{1-a}$ juntamente com a regra da cadeia, obtemos

$$u_z = \left(\frac{1}{1-a}\right)^a y^a u_y. \tag{2.6}$$

Para provar a parte da existência do Teorema 2.1, buscaremos uma solução para o seguinte problema equivalente

$$\begin{cases} \Delta_x u + \dfrac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e a segunda igualdade deve ser entendida no seguinte sentido ("fraco"):

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} u(x,y) = f(x). \tag{2.8}$$

Para tanto, inicialmente, devemos notar que apesar de

$$u(X) = K|X|^{1-N-a}, \tag{2.9}$$

onde K depende somente da dimensão, satisfazer a primeira igualdade de (2.7), conforme garante o Teorema 1.10, ela não satisfaz a segunda igualdade de (2.7). Para obter solução de (2.7), vamos primeiro encontrar uma solução u da primeira igualdade de (2.7), mas que além disso cumpra a relação

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \delta_0(x), \tag{2.10}$$

onde

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ \infty, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Inicialmente, observe que se $x \neq 0$ então a função u dada em (2.9) é tal que

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) \neq 0.$$

Assim, u não satisfaz (2.10). Por outro lado, pode-se verificar que

$$w(x,y) = y^a u_y(x,y)$$

é solução de

$$\Delta_x w - \frac{a}{y} w_y + w_{yy} = 0, \tag{2.11}$$

com u dada em (2.9). De fato, fazendo o cálculo direto, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta_x w - \frac{a}{y} w_y + w_{yy} &= y^a \partial_y \Delta_x u - \frac{a}{y}\left(\frac{ay^a}{y} u_y + y^a u_{yy}\right) + a(a-1)\frac{y^a}{y^2} u_y + \frac{ay^a}{y} u_{yy} \\ &\quad + \frac{ay^a}{y} u_{yy} + y^a u_{yyy}. \end{aligned}$$

Organizando os termos correspondentes, obtemos

$$\Delta_x w - \frac{a}{y}w_y + w_{yy} = y^a \left(\partial_y \Delta_x u - \frac{a^2}{y^2}u_y - \frac{a}{y}u_{yy} + \frac{a(a-1)}{y^2} + 2\frac{a}{y}u_{yy} + u_{yyy} \right),$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \Delta_x w - \frac{a}{y}w_y + w_{yy} &= y^a \left(\partial_y \Delta_x u - \frac{a}{y^2}u_y + \frac{a}{y}u_{yy} + u_{yyy} \right) \\ &= y^a \partial_y \left(\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, considere para cada $a \in (-1,1)$, $\Gamma_a(X) = K|X|^{1-N-a}$, onde K depende somente da dimensão, e

$$w(x,y) = y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(x,y), \tag{2.12}$$

de modo que w é solução da equação (2.11). Afirmamos que

$$\lim_{y\to 0} -y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(X) = \delta_0(x). \tag{2.13}$$

De fato

$$\partial_y \Gamma_{-a}(X) = K(1-N+a)\left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{-1-N+a}{2}} y.$$

Assim

$$y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(x,y) = K(1-N+a)\frac{y^{1-a}}{(|x|^2+|y|^2)^{\frac{1+N-a}{2}}}. \tag{2.14}$$

Considerando $x \neq 0$, temos

$$\lim_{y\to 0} -y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(X) = 0. \tag{2.15}$$

Fazendo $x = 0$, obtemos

$$y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(0,y) = K(1-N+a)\frac{y^{1-a}}{y^{1+N-a}} = K(1-N+a)\frac{1}{y^N},$$

e segue que

$$\lim_{y\to 0} -y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(0,y) = \infty. \tag{2.16}$$

Juntando (2.15) e (2.16) segue a igualdade (2.13) é válida.

Afim de usar as notações clássicas, denotemos

$$P_1(x,y) = K_1 \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+|y|^2)^{\frac{N+1-a}{2}}},$$

onde $K_1 = K(1-N+a)$. Note que, por (2.12) e (2.14), tem-se

$$P_1(x,y) = (1-N+a)w(x,y) = (1-N+a)y^{-a}\partial_y \Gamma_{-a}(x,y).$$

Logo, por (2.11), $P_1(x,y)$ satisfaz a primeira igualdade de (2.7) quando $y > 0$. Chamamos $P_1(x,y)$ de ***Núcleo de Poisson***. Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_1(x-\xi,y)d\xi < \infty.$$

Para provar o afirmado, considere $\delta > 0$ e escreva

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_1(x-\xi,y)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N \cap B((x,0),\delta)} P_1(x-\xi,y)d\xi + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B((x,0),\delta)} P_1(x-\xi,y)d\xi. \quad (2.17)$$

Note que quando $y > 0$, tem-se $P_1(x-\xi,y)$ contínua. Assim, a primeira integral do lado direito da equação (2.17) é finita. Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B((x,0),\delta)} P_1(x-\xi,y)d\xi &= K_1 y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B((x,0),\delta)} \frac{1}{(|x-\xi|^2+|y|^2)^{\frac{1+N-a}{2}}} d\xi \\ &\leq K_1 y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B((x,0),\delta)} \frac{1}{|x-\xi|^{1+N-a}} d\xi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como $1+N-a > N$ a integral em (2.18) é finita. Com isso a segunda integral do lado direito da equação (2.17) é também finita. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_1(x-\xi,y)d\xi = K_2,$$

onde $K_2 > 0$. Considere

$$P(x,y) = \frac{P_1(x,y)}{K_2}$$

de modo que

$$P(x,y) = K_3 \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+|y|^2)^{\frac{N+1-a}{2}}} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y)d\xi = 1, \quad (2.19)$$

onde $K_3 = K_1/K_2$.

Motivados pela intuição, consideremos

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y) f(\xi) d\xi. \quad (2.20)$$

Mostraremos no próximo lema que u definida em (2.20) é a função que estamos procurando para resolver o problema (2.7) e, consequentemente, prova a parte da existência de solução do Teorema 2.1.

Lema 2.1 (**Prova da Existência do Teorema 2.1**). *A função u definida em* (2.20) *resolve o problema* (2.7)*. Em particular, prova a parte da existência do Teorema 2.1.*

Demonstração. Note que $P(x,y)$ satisfaz a primeira igualdade de (2.7), pois $P(x,y)$ é multipla de w dada em (2.12) (veja (2.11) e (2.14)). Com isso, mostraremos que a u também satisfaz a primeira igualdade de (2.7). Com efeito

$$u_{x_i}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N}\left(P(x-\xi+te_i,u) - P(x-\xi,y)\right)f(\xi)d\xi. \tag{2.21}$$

Desde que P é derivável, existe $\delta > 0$ de modo que $t < \delta$ implica que

$$\left|\frac{P(x-\xi+te_i,y) - P(x-\xi,y)}{t} - P_{x_i}(x-\xi,y)\right| < 1.$$

Assim

$$\left|\frac{P(x-\xi+te_i,y) - P(x-\xi,y)}{t}f(\xi)\right| \leq |\left(1 + P_{x_i}(x-\xi,y)\right)f(\xi)|.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada em (2.21), obtemos

$$u_{x_i}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} P_{x_i}(x-\xi,y)f(\xi)d\xi. \tag{2.22}$$

Usando um raciocínio análogo ao desenvolvido para obter (2.22), devido a $P(x,y)$ satisfazer a primeira igualdade de (2.7), temos

$$\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\Delta_x P(x-\xi,y) + \frac{a}{y}P_y(x-\xi,y) + P_{yy}(x-\xi,y)\right)f(\xi)d\xi = 0.$$

Vamos provar agora que u satisfaz a segunda igualdade de (2.7). Para isso mostraremos que, dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = f(x_0).$$

Seja $\epsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ de tal forma que:

$$|(x,y) - (x_0,0)| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |u(x,y) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{2.23}$$

Como f é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|\xi - x_0| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a segunda igualdade de (2.19), temos

$$\begin{aligned} |u(x,y) - f(x_0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y)f(\xi)d\xi - f(x_0)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y)\left(f(\xi) - f(x_0)\right)d\xi\right|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Por outro lado
$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y)\left(f(\xi)-f(x_0)\right)d\xi\right| \leq I_1+I_2,$$
onde
$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^N\cap B((x_0,0),\delta_1)} P(x-\xi,y)|f(\xi)-f(x_0)|d\xi$$
e
$$I_2 := \int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} P(x-\xi,y)|f(\xi)-f(x_0)|d\xi.$$
Notemos que
$$I_1 < \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} P(x-\xi,y)d\xi = \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.25}$$
Além disso, se
$$|(x,y)-(x_0,0)| < \frac{\delta_1}{2} \qquad \text{e} \qquad |\xi - x_0| \geq \delta_1,$$
então
$$|\xi-x_0| \leq |\xi-x|+|x-x_0| \leq |\xi-x|+\frac{\delta_1}{2} \leq |\xi-x|+\frac{1}{2}|\xi-x_0|.$$
Ou seja
$$\frac{1}{2}|\xi-x_0| \leq |\xi-x|.$$
Como a f é limitada, então
$$I_2 \leq 2||f|| \int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} P(x-\xi,y)d\xi.$$
Logo
$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2||f||Ky^{1-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{(|x-\xi|^2+|y|^2)^{\frac{N+1-a}{2}}}d\xi \\ &\leq 2||f||Ky^{1-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{|x-\xi|^{N+1-a}}d\xi \\ &\leq 2^{N+2-a}||f||Ky^{1-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{|x_0-\xi|^{N+1-a}}d\xi. \end{aligned}$$
Sendo $N+1-a > N$, então
$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{|x_0-\xi|^{N+1-a}}d\xi < \infty.$$
Portanto
$$\lim_{y\to 0} 2^{N+2-a}||f||Ky^{1-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{|x_0-\xi|^{N+1-a}}d\xi = 0. \tag{2.26}$$
De (2.26), existe $\delta_2 > 0$ tal que:
$$|y| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad 2^{N+2-a}||f||Ky^{1-a}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B((x_0,0),\delta_1)} \frac{1}{|x_0-\xi|^{N+1-a}}d\xi < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.27}$$
Considerando $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ e fazendo uso de (2.25) e (2.27) em (2.24), obtemos (2.23). $\square$

2.2 Unicidade de Extensão

A prova da unicidade referida no Teorema 2.1 é obtida facilmente se provarmos que toda solução de (2.1) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX < \infty, \tag{2.28}$$

deve satisfazer a igualdade (2.2). Com efeito, se u e v são soluções de (2.1), então $u - v$ é solução de (2.1) para $f = 0$, de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla(u-v)|^2 y^a dX = 0,$$

de onde podemos concluir que $u = v$.

Observação 2.3. *Como vimos na Observação 2.1, apesar da $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \cos(x) + \cos(y),$$

ter transformada de fourier e $u : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$u(x,y,z) = e^z(\cos(x) + \cos(y)),$$

satisfazer (2.1)*, para $a = 0$ e $N = 2$, não temos igualdade* (2.2) *pois nesse caso*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 dX = \infty.$$

Lema 2.2. *Suponha que $u(x,y)$ é solução de* (2.1)*. Se*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX < \infty,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \sqrt{K_a} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \tag{2.29}$$

onde $K_a = 2^a \Gamma(\frac{3-a}{2})/\Gamma(\frac{1-a}{2})$.

Demonstração. Considere no problema (1.24), $\lambda = 1$ e ϕ a única solução do problema de valor inicial. Agora, considere $\lambda = |\xi|^2$ e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi''(y) + \frac{a}{y}\varphi'(y) - |\xi|^2\varphi(y) = 0, \\ \varphi(0) = \widehat{f}(\xi), \\ \lim_{y\to\infty} \varphi(y) = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Pelo Teorema 1.15, também temos uma única solução para (2.30). Além disso, note que

$$\varphi(y) = \widehat{f}(\xi)\phi(|\xi| y) \tag{2.31}$$

é solução de (2.30). Por outro lado, suponha que $u(\xi, y)$ é uma solução de (2.1). Desde que

$$\widehat{u_{x_j}}(\xi, y) = (i\xi_j)\widehat{u}(\xi, y),$$

então

$$\widehat{u_{x_j x_j}}(\xi, y) = (i\xi_j)\widehat{u_{x_j}}(\xi, y) = -|\xi_j|^2\widehat{u}(\xi, y).$$

Consequentemente

$$\widehat{\Delta_x u}(\xi, y) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{u_{x_j x_j}}(\xi, y) = -\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^2\widehat{u}(\xi, y) = -|\xi|^2\widehat{u}(\xi, y).$$

Uma vez que $u(x, y)$ resolve (2.1), e equivalentemente (2.4), temos

$$\widehat{\Delta_x u}(\xi, y) + \frac{a}{y}\widehat{u_y}(\xi, y) + \widehat{u_{yy}}(\xi, y) = 0,$$

que implica

$$-|\xi|^2\widehat{u}(\xi, y) + \frac{a}{y}\widehat{u_y}(\xi, y) + \widehat{u_{yy}}(\xi, y) = 0. \tag{2.32}$$

Sendo assim, para cada ξ em $\mathbb{R}^N$, a equação (2.32) é uma equação diferencial ordinária em y. Dessa forma, observe que $\widehat{u}(\xi, y)$, por (2.32) juntamente com o fato que $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$, também resolve o problema de valor inicial (2.30). Portanto, $\varphi(y) = \widehat{u}(\xi, y)$, ou seja,

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)\phi(|\xi|y). \tag{2.33}$$

Agora, note que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \left(|\nabla_x u|^2 + |u_y|^2\right) y^a dy d\xi.$$

Assim, pelo Teorema de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \left(|\xi|^2|\widehat{u}(\xi, y)|^2 + |\widehat{u_y}(\xi, y)|^2\right) y^a dy d\xi. \tag{2.34}$$

De (2.33) e (2.34), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2 \left(|\phi(|\xi|y)|^2 + |\phi^{'}(|\xi|y)|^2\right) y^a dy d\xi. \tag{2.35}$$

Fazendo uma mudança de variável $\overline{y} = |\xi|y$ em (2.35),

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{1-a}|\widehat{f}(\xi)|^2 \int_0^\infty \left(|\phi(\overline{y})|^2 + |\phi'(\overline{y})|^2\right) \overline{y}^a d\overline{y} d\xi. \tag{2.36}$$

Combinando (1.26) com (2.36), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX = \Psi(\phi)\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Portanto a prova do lema está completa. □

2.3 A Derivada Normal e o Laplaciano Fracionário

O objetivo desta seção é mostrar a relação entre a derivada normal da solução de (2.1) e o Laplaciano Fracionário da condição de fronteira, que é destacada em (2.3). Para auxiliar, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} \Delta_x u + z^\alpha u_{zz} = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.37}$$

que é equivalente ao problema (2.7). Para resolver esse problema é suficiente considerar

$$\tilde{P}(x,z) = K \frac{z}{(|x|^2 + (1-a)^2 |z|^{\frac{2}{(1-a)}})^{\frac{N+1-a}{2}}}$$

como sendo o núcleo de Poisson; note que $\tilde{P}(x,z)$ é obtida de $P(x,y)$ através da mudança de variável $z = (y/(1-a))^{1-a}$. Consequentemente a solução u será

$$u(x,z) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{P}(x-\xi, z) f(\xi) d\xi.$$

O próximo lema estabelece a relação (2.3).

Lema 2.3. *Seja u solução de* (2.1). *Então*

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x).$$

onde $C = -\left(1/(1-a)\right)^{-a} K$.

Demonstração. No intuito de facilitar o entendimento, devemos observar que

$$u_z(x,0) = \lim_{y\to 0} \lim_{z \to 0} \frac{u(x,y+z) - u(x,y)}{z} = \lim_{z\to 0} \lim_{y \to 0} \frac{u(x,y+z) - u(x,y)}{z}. \tag{2.38}$$

Pela segunda igualdade de (2.1), tem-se

$$u_z(x,0) = \lim_{z\to 0} \lim_{y \to 0} \frac{u(x,y+z) - u(x,y)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{u(x,z) - f(x)}{z}.$$

Pela equação (2.19), obtemos que

$$u_z(x,0) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{P}(x-\xi, z)(f(\xi) - f(x)).$$

Logo

$$u_z(x,0) = \lim_{z \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{K}{(|x-\xi|^2 + (1-a)^2)|z|^{\frac{N+1-a}{2}}} (f(\xi) - f(x)) d\xi$$

e, pelo Valor Principal de Cauchy,

$$u_z(x,0) = PV \int_{\mathbb{R}^N} \frac{K}{|x-\xi|^{N+1-a}} (f(\xi) - f(x)) d\xi.$$

Portanto

$$u_z(x,0) = -K(-\Delta)^s f(x). \tag{2.39}$$

Fazendo uso de (2.6) e (2.39) obtemos

$$\lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x),$$

onde $C = -\left(1/(1-a)\right)^{-a} K$. $\square$

Nosso objetivo agora é também provar a relação (2.3), mas desta vez fazendo uso da transformada de Fourier em relação a variável x. Para esse fim, faremos uso de (2.29) provado no Lema 2.2.

Lema 2.4. *Seja u solução de* (2.1) *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 y^a dX < \infty.$$

Então

$$\lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x).$$

onde $C = \Psi(\phi)$, com $\Psi(\phi)$ dado em (1.26) *e ϕ mínimo de Ψ.*

Demonstração. Por (1.6), (1.21) e (2.2), para todo $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX = C \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi,0)d\xi. \tag{2.40}$$

Pelo Teorema de Green

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla u \nabla h dX = \lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} y^a u_y(x,y) h(x,y) dx. \tag{2.41}$$

Além disso

$$C\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi,0)d\xi = C\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{(-\Delta)^s} f(\xi)\widehat{h}(\xi,0)d\xi.$$

Então, pelo Teorema de Parseval

$$C\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{(-\Delta)^s} f(\xi)\widehat{h}(\xi,0)d\xi = C\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s f(\xi) h(\xi,0)d\xi. \tag{2.42}$$

Portanto, por (2.40), (2.41) e (2.42) temos

$$\lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = C(-\Delta)^s f(x).$$

$\square$

Capítulo 3

Extensões por Reflexão, Desigualdade Harnack e Monotonicidade

Neste capítulo aplicaremos a Desigualdade de Harnack para as equações (2.4) (ou (2.5)), para mostrar que se o operador $(-\Delta)^s$ se anula em uma certa bola então podemos refletir a solução u e fazer-lhe uma solução de (2.4) (ou (2.5)) em $\{y = 0\}$ (ou $\{z = 0\}$) num sentido apropriado.

3.1 Extensão por Reflexão no Caso Divergente

Primeiramente abordaremos o caso divergente.

Lema 3.1. *Suponha que $u : \mathbb{R}^{N+1}_+ \to \mathbb{R}$ é solução da equação (2.4) tal que $y^a|\nabla u|^2$ é localmente integrável e, para $|x| \leq R$,*

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x, y) = 0. \tag{3.1}$$

Então a extensão

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & se \quad y \geq 0, \\ u(x, -y), & se \quad y < 0. \end{cases}$$

é solução fraca de

$$\operatorname{div}(|y|^a \nabla u) = 0$$

na bola $B_R = \left\{X = (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : |x|^2 + |y|^2 \leq R^2\right\}$.

Demonstração. Seja $h \in C_0^\infty(B_R)$ uma função teste. Devemos mostrar que

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla \tilde{u} \nabla h dX = 0. \tag{3.2}$$

Para cada $\epsilon > 0$, note que

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX = \int_{B_R\setminus\{|y|<\epsilon\}} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX + \int_{B_R\cap\{|y|<\epsilon\}} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX. \quad (3.3)$$

Observe que

$$\operatorname{div}(|y|^a h\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y},$$

onde

$$F_i = |y|^a h u_{x_i}$$

e

$$H = |y|^a h u_y.$$

Assim

$$\operatorname{div}(|y|^a h\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} |y|^a h_{x_i} u_{x_i} + \sum_{i=1}^{N} |y|^a h u_{x_i x_i} + |y|^a h_y u_y + |y|^a h \left(u_{yy} + \frac{a}{y} u_y \right).$$

Organizando as contas, obtemos

$$\operatorname{div}(|y|^a h\nabla u) = |y|^a h(\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy}) + |y|^a \nabla h\nabla u.$$

Como u resolve (2.4), tem-se que

$$\operatorname{div}(|y|^a h\nabla u) = |y|^a \nabla h\nabla u. \quad (3.4)$$

Fazendo o mesmo cálculo com $u(x, -y)$ obtemos (3.4) para $\tilde{u}$. Assim, fazendo uso de (3.3) e (3.4), temos

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX = \int_{B_R\setminus\{|y|<\epsilon\}} \operatorname{div}(|y|^a h\nabla\tilde{u}) dX + \int_{B_R\cap\{|y|<\epsilon\}} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX.$$

Usando o Teorema de Green

$$\int_{B_R\setminus\{|y|<\epsilon\}} \operatorname{div}(|y|^a h\nabla\tilde{u}) dX = \int_{B_R\cap\{|y|=\epsilon\}} \epsilon^a h\tilde{u}_y(x,\epsilon) dx \quad (3.5)$$

Sendo assim, por (3.5)

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX = \int_{B_R\cap\{|y|=\epsilon\}} \epsilon^a h\tilde{u}_y(x,\epsilon) dx + \int_{B_R\cap\{|y|<\epsilon\}} |y|^a \nabla\tilde{u}\nabla h dX. \quad (3.6)$$

Observe agora que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, por (3.1), tem-se

$$|\epsilon^a h\tilde{u}_y(x,\epsilon)\chi_{B_R\cap\{|y|=\epsilon\}}| \leq |h|,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, usando o Teorema da Convergência Dominada na primeira integral do lado direito de (3.6), concluímos que a mesma converge a zero. Afirmamos que a segunda integral do lado direito de (3.6) converge para zero. De fato, observe que $B_R \cap \{|y| = 0\}$ tem medida nula. Considere $X = (x, y) \notin B_R \cap \{|y| = 0\}$. Logo, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|y| > \epsilon_0$. Assim, para todo $\epsilon < \epsilon_0$, segue que $|y| > \epsilon$. O que implica que

$$|y|^a \nabla \tilde{u} \nabla h \chi_{B_R \cap \{|y| < \epsilon\}} = 0, \tag{3.7}$$

e em particular temos (3.7) convergindo para 0 quase sempre em X. Além disso

$$\left| |y|^a \nabla \tilde{u} \nabla h \chi_{B_R \cap \{|y| < \epsilon\}} \right| \leq \frac{1}{2} |y|^a |\nabla \tilde{u}|^2 + \frac{1}{2} |y|^a |\nabla h|^2.$$

Agora, sendo $y^a |\nabla u|^2$ localmente integrável, o mesmo vale para $|y|^a |\nabla \tilde{u}|^2$. Assim, mostraremos que $|y|^a |\nabla h|^2$ é integrável. Com efeito, o caso $a \geq 0$ não há nada a fazer. Precisamos nos preocupar somente com o caso em que $a < 0$. Como $h \in C_0^\infty(B_R)$, então existe uma constante C tal que $|\nabla h|^2 \leq C$. Logo

$$\int_{B_R} |y|^a |\nabla h|^2 dX \leq C \int_{B_R} |y|^a dX.$$

Usando coordenadas polares, tem-se que

$$C \int_{B_R} |y|^a dX = C \int_0^R \int_{\partial B_R} r^a dS dr = C \int_0^R \frac{1}{r^{|a|}} |\partial B_R| dr.$$

Sendo $|a| < 1$, então $\frac{1}{r^{|a|}}$ é integrável. O que mostra que $|y|^a |\nabla h|^2$ é integrável. Portanto pelo Teorema da Convergência Dominada a segunda integral do lado direito de (3.6) converge para 0. Podemos concluir então que (3.2) é válida. □

Há duas hipóteses no Lema 3.1 que merecem destaques. A primeira, $y^a |\nabla u|^2$ ser localmente integrável, está relacionada ao seguinte problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|z|^a \nabla u(x, z)) = 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u(x, z) = g(x, z) & \text{sobre} \quad \partial B_R, \end{cases} \tag{3.8}$$

onde a primeira igualdade de (3.8) é no sentido fraco e g é uma classe de funções geral. O problema (3.8) possui uma única solução no espaço de Sobolev com peso $H^1(B_R, |z|^a)$ (ver detalhes em [11]), informação que torna a hipotése de integrabilidade natural. O ponto que merece ainda maior destaque, é esclarecer em que sentido tomamos o limite em (3.1). Nesse caso particular, desde que o limite se anula, poderíamos provar que realmente $u \in C^\infty$ em x e o limite vale no sentido uniforme. Em geral seria conveniente ter uma definição fraca de (3.1). A equação (3.2) passa a ser a definição de (3.1) no sentido fraco. Em todo caso, o limite (3.1) vale no seguinte sentido: para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(B_1 \setminus \{0\})$, tem-se

$$\lim_{y \to 0^+} \int_{B_1 \setminus \{0\}} y^a u_y(x, y) \phi(x, y) dX = 0.$$

3.2 Extensão por Reflexão no Caso Não Divergente

Lema 3.2. *Dada uma função contínua g sobre ∂B_R, de modo que $g(x,z) = g(x,-z)$, existe uma única função $u \in C(\overline{B_R})$ tal que:*

i) *u resolve a equação $u_{xx} + |z|^\alpha u_{zz} = 0$ em $B_R \cap \{z \neq 0\}$;*

ii) *$u \in C^1(B_R)$;*

iii) *$u_z(x,0) = 0$.*

Demonstração. **Unicidade:** Suponha que u e v satisfazem **i), ii)** e **iii)**. Seja $\epsilon > 0$ e considere $w = u - v + \epsilon|z|$. Note que w satisfaz **i)**. De fato

$$w_z = u_z - v_z + \epsilon\frac{z}{|z|}.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} w_{xx} + |z|^\alpha w_{zz} &= u_{xx} - v_{xx} + |z|^\alpha \left(u_{zz} - v_{zz} + \epsilon \left(\frac{|z| - z\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^2} \right) \right) \\ &= u_{xx} - v_{xx} + |z|^\alpha (u_{zz} - v_{zz}), \end{aligned}$$

ou seja

$$w_{xx} + |z|^\alpha w_{zz} = 0.$$

Agora, desde que w é contínua e $\overline{B_R}$ é compacto, existe $X_0 \in \overline{B_R}$ onde w assume valor máximo. Note que

$$X_0 \notin B_R \cap \{z \neq 0\}$$

pois, do contrário, como w satisfaz **i)** e $|z| > 0$, podemos aplicar o Princípio do Máximo e concluir que w é constante, o que seria uma contradição, visto que $w = \epsilon|z|$ em ∂B_R. Além disso

$$w_{z^+} > w_{z^-}$$

(w_{z^+} e w_{z^-} representam as derivadas laterais respectivas). Observe que

$$w_{z^+} = u_{z^+} - v_{z^+} + \epsilon > u_{z^-} - v_{z^-} - \epsilon = w_{z^-}.$$

Dessa forma, não existe ponto de máximo em $B_R \cap \{z = 0\}$, pois se existisse $w_{z^+} = 0 = w_{z^-}$ no ponto. Portanto, $X_0 \in \partial B_R$. Assim, desde que u e v são soluções de (3.8), segue que

$$w \leq w(X_0) = u(X_0) - v(X_0) + \epsilon|z_0| \leq \epsilon R. \tag{3.9}$$

Fazendo então $\epsilon \to 0$ em (3.9), temos que $u \leq v$. De maneira análoga obtém-se $v \leq u$ e concluímos que $u = v$.

Existência: Para cada $\epsilon > 0$, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta_x u + (|z| + \epsilon)^\alpha u_{zz} = 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{3.10}$$

Pela teoria de Schauder o problema acima possui solução clássica para cada $\epsilon > 0$. As soluções u^ϵ são uniformemente limitadas em L^∞, devido ao princípio do máximo para equações uniformemente elipticas. A equação (3.10) possui coeficientes constantes em relação a x. A estimativa de Hölder em [6] detém independentemente de ϵ e podemos aplicar para qualquer u_ϵ e para qualquer Quociente de Newton na direção de x para obter estimativas uniformes para as derivadas de qualquer ordem com respeito a x (em termos do Laplaciano fracionário, isto corresponde ao fato que as funções tais que $(-\Delta)^s = 0 \in C^\infty$). Portanto temos que $\Delta_x u^\epsilon$ é limitada independentemente de ϵ em qualquer bola menor que $B_{(1-\delta/2)R}$.

Desde que $u^\epsilon \in C^2(B_R)$ e u é simétrico com respeito ao hiperplano $z = 0$, então $u^\epsilon_z(x, 0) = 0$. Com efeito

$$\begin{aligned} u^\epsilon_z(x,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{u^\epsilon(x,z) - u^\epsilon(x,0)}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{u^\epsilon(x,z) - u^\epsilon(x,0)}{2z} + \lim_{-z\to 0} \frac{u^\epsilon(x,-z) - u^\epsilon(x,0)}{-2z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\Delta_x u^\epsilon + (|z| + \epsilon^\alpha) u^\epsilon_{zz} = 0,$$

temos que

$$\frac{|u^\epsilon_{zz}|}{(|z| + \epsilon)^\alpha} = |\Delta_x u^\epsilon|.$$

Sendo $\Delta_x u^\epsilon$ limitado independente de ϵ, então existe $C > 0$ tal que

$$|\Delta_x u^\epsilon| \leq C, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Logo

$$|u^\epsilon_{zz}| \leq \frac{C}{|z|^\alpha}.$$

Desde que $\alpha = -2a/(1-a)$ e $a \in (-1, 1)$, temos que $\alpha < 1$. Para isso, basta observar que:

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{-2a}{1-a} < 1 \Leftrightarrow -2a < 1 - a \Leftrightarrow -a < 1.$$

Podemos então integrar u_{zz}^{ϵ} para qualquer (x,z) tal que $|x| < 1-2\delta$ e $0 < z < 1-\delta$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} |u_z^{\epsilon}(x,z)| &= \left| \int_0^z u_{zz}^{\epsilon}(x,s)ds \right| \\ &\leq \int_0^z \frac{C}{|z|^{\alpha}} ds = \bar{C} z^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto

$$|u_z^{\epsilon}(x,z) - u_z^{\epsilon}(x,0)| \leq \bar{C} z^{1-\alpha}.$$

Isto mostra que u_z^{ϵ} é C^{η} em $B_{(1-\delta)R}$, para $\eta = min(1, 1-\delta)$, independentemente de ϵ para qualquer δ. Por Arzelá-Ascoli, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno e extrair uma subsequência que converge para a solução u desejada. Além disso, considerando g não-negativa, vamos mostrar agora que u satisfaz a Desigualdade de Harnack de Caffarelli e Gutierrez em [6]. Mostraremos que essa desigualdade vale para todo u^{ϵ} independentemente de ϵ. Sabemos que u_{ϵ} é solução de (3.10), assim aplicando o Príncipio do Máximo temos que u^{ϵ} é não-negativa. Considerando

$$L(u^{\epsilon}) = tr(\Phi D^2 u^{\epsilon}),$$

onde

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\epsilon + |z|)^{\alpha} \end{pmatrix},$$

podemos aplicar a Desigualdade de Harnack de Caffarelli e Gutierrez em [6] para u^{ϵ}, ou seja, existe C constante independente de ϵ tal que

$$\sup_{S(0,\frac{\tau}{3}r)} u^{\epsilon} \leq C \inf_{S(0,\frac{\tau}{3}r)} u^{\epsilon}. \tag{3.11}$$

Com $0 < \tau < 1$ e

$$S(0,r) = \left\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : |y| < r \right\}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ em (3.11), segue o resultado. $\square$

3.3 Desigualdade de Harnack

Como uma aplicação do estudo de soluções de (2.7) e (2.37), no próximo Teorema provaremos a Desigualdade de Harnack, utilizando métodos de Equações Diferenciais Parcias locais.

Teorema 3.1. *(Desigualdade de Harnack) Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ não-negativa tal que $(-\Delta)^s f = 0$ em B_r. Então existe uma constante C (dependendo somente de s e da dimensão) tal que*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} f \leq C \inf_{B_{\frac{r}{2}}} f$$

Demonstração. Considere u a extensão de f que resolve o problema (2.7). Por construção a u é não-negativa, pois a f é não-negativa. Por hipótese

$$(-\Delta)^s f = 0 \ \text{ em } \ B_r.$$

Então pelo Teorema 2.1, obtemos

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x, y) = 0.$$

Pelo Lema 3.1, segue que $\tilde{u}$ é solução de

$$\operatorname{div}(|y|^a \nabla u) = 0 \ \ em \ \ \overline{B}_{\frac{r}{2}}.$$

Aplicando o resultado de Fabes, Kenig e Serapioni em [11], podemos garantir que existe uma constante C tal que

$$\max_{\overline{B}_{\frac{r}{2}}} u \leq C \min_{\overline{B}_{\frac{r}{2}}} u.$$

Portanto

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} f \leq C \inf_{B_{\frac{r}{2}}} f.$$

Outra maneira de provar o teorema é considerando u a extensão de f que resolve 2.37. Como

$$(-\Delta)^s f = 0 \ \text{ em } \ B_r,$$

isto implica, pelo Teorema 2.1, que

$$u_z(x, 0) = 0 \ \text{ em } \ B_r.$$

Afirmamos que u é contínua em $\overline{B_{\frac{r}{2}}}$, em particular sobre $\partial B_{\frac{r}{2}}$. Note que

$$u_z(x, 0) = 0,$$

assim obtemos

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{u(x, z) - u(x, 0)}{z} = 0.$$

Dessa maneira

$$\lim_{z \to 0^+} u(x, z) = u(x, 0).$$

Concluimos assim a continuidade de u. Considere a função $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{se} \quad y \geq 0, \\ u(x,-y), & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

Como u é contínua em $\overline{B_{\frac{r}{2}}}$ o mesmo vale para a $\tilde{u}$. Note que $\tilde{u}$ satisfaz as condições **i), ii)** e **iii)** do Lema 3.2, pois u as satisfaz. Sendo assim a Desigualdade de Harnack se aplica em $\tilde{u}$, isto é,

$$\sup_{S(0,\frac{\tau}{3}\frac{r}{2})} \tilde{u} \leq C \inf_{S(0,\frac{\tau}{3}\frac{r}{2})} \tilde{u}$$

com $0 < \tau < 1$. Temos assim que

$$\sup_{S(0,\frac{\tau}{3}\frac{r}{2})} \tilde{u}(x,0) \leq C \inf_{S(0,\frac{\tau}{3}\frac{r}{2})} \tilde{u}(x,0).$$

Portanto

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} f \leq C \inf_{B_{\frac{r}{2}}} f.$$

$\square$

Corolário 3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, não-negativa tal que $(-\Delta)^s f = 0$ em B_1, então $f \in C^\alpha$ em $\overline{B_{\frac{1}{2}}}$ para algum α.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que existe uma constante L tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) \leq L^{n-1}(M - m) \tag{3.12}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, onde

$$M = \sup_{B_1} f(x)$$

e

$$m = \inf_{B_1} f(x).$$

Caso $n = 1$ é válido, pois

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} f(x) \leq L^0(M - m).$$

Suponha que (3.12) é verdadeiro, devemos mostrar que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) \leq L^n(M - m). \tag{3.13}$$

Fazendo

$$\overline{f}(x) = f(x/2^n),$$

obtem-se

$$\overline{M} - \overline{f}(x) \geq 0,$$

onde

$$\overline{M} = \sup_{B_1} \overline{f}(x).$$

Note que

$$(-\Delta)^s \left(\overline{M} - \overline{f}(x)\right) = 0,$$

pois a f satisfaz tal relação. Portanto pelo Teorema (3.1), existe uma constante C tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \left(\overline{M} - \overline{f}(x)\right) \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \left(\overline{M} - \overline{f}(x)\right). \tag{3.14}$$

Seja

$$\overline{m} = \inf_{B_1} \overline{f}(x),$$

então

$$\overline{f}(x) - \overline{m} \geq 0.$$

Desenvolvendo um cálculo análogo ao feito para obter (3.14), temos

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \left(\overline{f}(x) - \overline{m}\right) \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \left(\overline{f}(x) - \overline{m}\right). \tag{3.15}$$

De (3.14), tem-se

$$\overline{M} - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) \leq C\overline{M} - C \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x). \tag{3.16}$$

Por outro lado fazendo uso de (3.15), obtem-se

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \overline{m} \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - C\overline{m}. \tag{3.17}$$

Combinando (3.16) e (3.17), então

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) \leq \frac{C-1}{C+1}(\overline{M} - \overline{m}). \tag{3.18}$$

Observe que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) = \sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x),$$

e

$$\overline{M} - \overline{m} = \sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x).$$

Logo

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) \leq L \left(\sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) \right). \tag{3.19}$$

onde $L = (C-1)/(C+1)$. Por fim, de (3.12) e (3.19) obtemos (3.13). Agora tome α de modo que $1/2^\alpha = L$. Sejam $x, y \in B_{\frac{1}{2}}$ e note que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^k} \leq |x-y| < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Além disso

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{B_{\frac{1}{2^k}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^k}}} f(x).$$

De (3.12), tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq L^{k-1}(M-m).$$

Como

$$\frac{1}{2^{\alpha k}} \leq |x-y|^\alpha < \frac{1}{2^{\alpha(k-1)}},$$

segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{\alpha k}} \frac{(M-m)}{L} \leq |x-y|^\alpha \frac{(M-m)}{L}.$$

□

3.4 Fórmulas de Monotonicidade

As fórmulas de monotonicidade são uma ferramenta "muito poderosa"no estudo da regularidade e propriedades de Equações Diferenciais Parciais elípticas. Elas foram usadas em uma série de problemas para explorar as propriedades locais das equações. A equação (2.4) representa uma função harmônica em $(N+1+a)$ dimensões. Um exemplo simples, é se

$$\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0, \quad B(0,1)^+,$$

$$\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y), \quad |x| \leq 1,$$

então

$$\Phi(R) = \frac{1}{R^{N+1+a}} \int_{B(0,R)^+} |\nabla u|^2 y^a dX$$

é monótona não-decrescente.

No Teorema 3.3, faremos uma aplicação da Fórmula de Monotonicidade. Tal fórmula é conhecida como Fórmula de frequência de Almgren. Antes de provarmos o Teorema 3.3, demonstraremos o seguinte Lema.

Lema 3.3. *Seja u solução de (2.4), em $B_{R_0} \cap \{y \neq 0\}$, tal que $y^a u_y(x,y)$ é limitada para todo x com $|x| < R_0$, onde*

$$u_z(x,0) = 0 \qquad ou \qquad \lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = 0.$$

Então se $R < R_0$, temos

$$R \int_{\partial B(0,R)\cap\{y>0\}} y^a (|u_\tau|^2 - |u_\nu|^2) d\sigma = \int_{B(0,R)^+} y^a (N+a-1)|\nabla u|^2 dx.$$

Demonstração. Como u é solução de (2.4), então

$$\operatorname{div}\left(y^a \frac{|\nabla u|^2}{2} X - y^a \langle X, \nabla u\rangle \nabla u \right) = y^a \frac{N+a-1}{2} |\nabla u|^2. \tag{3.20}$$

Aplicando o Teorema de Green em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)^+} y^a \frac{N+a-1}{2} |\nabla u|^2 dX \quad = \quad & \int_{\partial B(0,R)\cap\{y>\epsilon\}} y^a \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} X - \langle X, \nabla u\rangle \nabla u \right) \frac{X}{|X|} d\sigma \\ & + D_\epsilon,\end{aligned}$$

onde

$$D_\epsilon := \int_{B(0,R)\cap\{y=0\}} \left(-\epsilon^a \frac{|\nabla u(x,\epsilon)|^2}{2} \epsilon + \epsilon^a \langle (x,\epsilon), \nabla u(x,\epsilon)\rangle u_y(x,\epsilon) \right) dx.$$

Desenvolvendo as contas

$$\int_{B(0,R)^+} y^a \frac{N+a-1}{2} |\nabla u|^2 dX = R \int_{\partial B(0,R)\cap\{y>\epsilon\}} y^a \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} - |u_\nu| \right) d\sigma + D_\epsilon, \tag{3.21}$$

Sabemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{a+1} \frac{|\nabla u(x,\epsilon)|^2}{2} = 0.$$

Além disso, por hipótese

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^a u_y(x,\epsilon) = 0.$$

Portanto, fazendo $\epsilon \to 0$ em (3.21), tem-se

$$\int_{B(0,R)^+} y^a \frac{N+a-1}{2} |\nabla u|^2 dX = R \int_{\partial B(0,R)\cap\{y>0\}} y^a \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} - |u_\nu| \right) d\sigma. \tag{3.22}$$

Trocando $|\nabla u|^2$ por $|u_\tau|^2 + |u_\nu|^2$ em (3.22), concluímos a demonstração. □

Teorema 3.3. *Se u resolve (2.4) em $B(0,R_0)^+$, tal que para todo $x \in B(0,R_0)^+$*

$$u_z(x,0) = 0 \quad ou \quad \lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = 0$$

então

$$\Phi(R) = R \frac{\int_{B(0,R)^+} |\nabla u|^2 y^a dX}{\int_{\partial B(0,R)^+} |u|^2 y^a d\sigma}$$

é monótona não-decrescente para todo $R < R_0$. Além disso, Φ é constante, se somente se, u é homogênea.

Demonstração. Devemos mostrar que $\log \Phi(R)$ é monótona não-decrescente. Note que

$$(\log \Phi)'(1) \geq 0.$$

De fato

$$\log(\Phi(R)) = \log R + \log \int_{B(0,R)^+} |\nabla u|^2 y^a dX - \log \int_{\partial B(0,R)^+} |u|^2 y^a d\sigma.$$

Por outro lado

$$\left(\int_{B(0,R)^+} |\nabla u|^2 y^a dX \right)' = \left(\int_0^R \int_{S(0,r)} |\nabla u|^2 y^a d\sigma dr \right)' = \int_{S(0,R)} |\nabla u|^2 y^a d\sigma. \quad (3.23)$$

Fazendo $z = \theta/R$, então $dz = 1/R^N dX$. Logo

$$\left(\int_{\partial B(0,R)^+} |u|^2 y^a d\theta \right)' = \left(\int_{\partial B(0,R)^+} |u(R,z)|^2 (yR)^a R^N dz \right)'.$$

Com um cálculo direto, temos

$$\left(\int_{\partial B(0,R)^+} |u|^2 y^a d\theta \right)' = \int_{\partial B(0,R)^+} y^a \left(2uu_\nu R^{n+a} + u^2 (N+a) R^{n+a-1} \right) dz. \quad (3.24)$$

Como

$$(\log \Phi)'(1) = 1 + \frac{\left(\int_{B(0,1)^+} |\nabla u|^2 y^a dX \right)'}{\int_{B(0,1)^+} |\nabla u|^2 y^a dX} - \frac{\left(\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma \right)'}{\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma},$$

de (3.23) e (3.24)

$$(\log \Phi)'(1) = 1 + \frac{\int_{S(0,1)} |\nabla u|^2 y^a d\sigma}{\int_{B(0,1)^+} |\nabla u|^2 y^a dX} - \frac{\int_{S(0,1)} \left(2uu_\nu + (N+a)|u|^2 \right) y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma}.$$

onde $S(0,1) = \partial B(0,1) \cap \{y > 0\}$. Observe que

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0.$$

O que implica que

$$\operatorname{div}(y^a u \nabla u) = y^a |\nabla u|^2.$$

Com efeito

$$F_i(x,y) = y^a u u_{x_i},$$

assim

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x,y) = y^a u_{x_i}^2 + y^a u u_{x_i x_i}.$$

Por outro lado

$$G(x,y) = y^a u u_y,$$

então
$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = ay^{a-1}uu_y + y^a u_y^2 + y^a uu_{yy}.$$
Organizando as contas, obtemos

$$\operatorname{div}(y^a u\nabla u) = y^a|\nabla u|^2 + y^a u\Delta_x u + ay^{a-1}uu_y + y^a uu_{yy} = y^a|\nabla u|^2.$$

Portanto
$$\int_{B_1^+} \operatorname{div}(y^a u\nabla u)dX = \int_{B_1^+} |\nabla u|^2 y^a d\sigma. \tag{3.25}$$
Pelo Teorema de Green
$$\int_{B(0,1)^+} \operatorname{div}(y^a u\nabla u)dX = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{S(0,1)} y^a uu_\nu d\sigma - \int_{|x|<1} u_y u y^a dx\right).$$
Como por hipótese
$$\lim_{y\to 0} y^a u_y(x,y) = 0,$$
então
$$\int_{B(0,1)^+} \operatorname{div}(y^a u\nabla u)dX = \int_{S(0,1)} y^a uu_\nu d\sigma. \tag{3.26}$$
Note que
$$\int_{S(0,1)} |\nabla u|^2 y^a d\sigma = \int_{S(0,1)} \left(|u_\tau|^2 - |u_\nu|^2\right) y^a d\sigma + 2\int_{S(0,1)} |u_\nu|^2 y^a d\sigma.$$
Pelo Lema 3.3, tem-se
$$\int_{S(0,1)} |\nabla u|^2 y^a d\sigma = \int_{B(0,1)^+} (N+a-1)|\nabla u|^2 y^a dX + 2\int_{S(0,1)} |u_\nu|^2 y^a d\sigma. \tag{3.27}$$
Fazendo uso de (3.25), (3.26) e (3.27),
$$(\log\Phi)'(1) = 1 + A - B.$$

com
$$A := \frac{\int_{B(0,1)^+}(N+a-1)|\nabla u|^2 y^a dX + 2\int_{S(0,1)} |u_\nu|^2 y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} uu_\nu y^a d\sigma}$$
e
$$B := \frac{\int_{S(0,1)} \left(2uu_\nu + (N+a)|u|^2\right) y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma}.$$
Prosseguindo com o cálculo, obtem-se
$$(\log\Phi)'(1) = 1 + (N+a-1) - (N+a) + \frac{\int_{S(0,1)} 2|u_\nu|^2 y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} u.u_\nu y^a d\sigma} - \frac{\int_{S(0,1)} 2uu_\nu y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma}.$$

Por fim, temos

$$(\log \Phi)'(1) = 2\left(\frac{\int_{S(0,1)} |u_\nu|^2 y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} u u_\nu y^a d\sigma} - \frac{\int_{S(0,1)} u u_\nu y^a d\sigma}{\int_{S(0,1)} |u|^2 y^a d\sigma}\right).$$

Pela Desigualdade de Cauchy Schwartz

$$(\log \Phi)'(1) \geq 0.$$

Considere

$$\overline{\Phi}(R) = \Phi(\lambda R),$$

onde $\lambda, R > 0$, e observe que

$$0 \leq (\log \overline{\Phi})'(1) = (\log \Phi)'(\lambda)\lambda.$$

Então

$$(\log \Phi)'(\lambda) \geq 0,$$

para todo $\lambda > 0$. Portanto $\log(\Phi)(R)$ é monótona não-decrescente como queríamos.

$\square$

Capítulo 4

Equação de Schrödinger Não-linear Fracionária

Consideremos uma partícula de massa constante m se movendo ao longo do eixo x sujeita a uma força $F(x,t)$. Na mecânica clássica, determinamos a posição da partícula em um dado instante de tempo: $x(t)$. De posse desta informação, podemos obter sua velocidade, o momento, energia cinética e qualquer outra variável dinâmica que for de interesse. Para determinar $x(t)$, utilizamos a Segunda Lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ em conjunto com condições iniciais apropriadas.

Já a mecânica quântica aborda o mesmo problema de uma maneira diferente, através da função de onda da partícula, que é interpretada de maneira estatística, uma vez que não é possível determinar com exatidão a posição da partícula em um dado instante, apenas a probabilidade de que ela esteja em uma dada posição naquele instante.

A Equação de Schrödinger Linear descreve a dinâmica do estado de qualquer sistema mecânico quântico e é considerada um postulado da mecânica quântica:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + W(x,t)\psi(x,t),$$

para a função de onda $\psi(x,t)$ de uma partícula quântica de massa m se movendo em um campo de potencial $W(x,t)$ e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. A Equação de Schrödinger Não-linear acrescenta uma ação externa

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + W(x,t)\psi(x,t) - |\psi(x,t)|^{p-1}\psi(x,t),$$

onde $p > 1$, sendo originalmente considerado por Erwin Schrödinger $p = 3$ (ver [15]). Nós podemos olhar para soluções com variáveis separáveis:

$$\psi(x,t) = e^{i(E/\hbar)t}u(x),$$

de modo que, substituindo esta solução na equação e considerando $V(x) = W(x,t) - E \geq 0$, obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + V(x))u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x).$$

Neste Capítulo nosso foco está na Equação de Schrödinger Não-linear Fracionária, cujo operador é dado pela energia total

$$C_{N,s}(-\Delta)^s\psi(x) + V(x)\psi(x),$$

onde $0 < s < 1$, $C_{N,s} > 0$. Usaremos o estudo desenvolvido no Capítulo 2 para abordar o seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N), \quad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $(-\Delta)^s$ denota o Laplaciano Fracionário, $0 < s < 1$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $2 < p < 2N/(N-2s)$, $N \geq 3$. A igualdade de (4.1) é conhecida como equação de Schrödinger não-linear fracionária. Além disso, assumiremos as seguintes hipóteses sobre o potencial V:

(V_1) existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Com essas hipóteses sobre V mostraremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$. Então (4.1) possui uma solução não-trivial.*

Para provar este teorema, começaremos destacando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$ na norma (1.2). Relembramos que para $N \geq 3$ (ver [10, Teorema 6.5]), temos

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_p\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.2}$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, e $p \in [2, 2N/(N-2s)]$, onde $C_p > 0$.

4.1 Estrutura Variacional

Nesta seção, usaremos o resultado de Caffarelli e Silvestre trabalhado no Capítulo 2 para garantir a existência de uma solução de (4.1). Será desenvolvida uma interpretação local do Laplaciano Fracionário em $\mathbb{R}^N$ considerando um operador de tipo Dirichlet para Neumann no domínio

$$\mathbb{R}^{N+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : t > 0\}.$$

Suponha que u resolve (4.1) e que w seja solução de (2.1), com $u = f$. Então pelo Teorema 2.1, tem-se

$$\left(\frac{1}{1-a}\right)^a \lim_{y\to 0} y^a w_y(x,y) = -\frac{1}{K_a}(-\Delta)^s u(x). \tag{4.3}$$

Aplicando a relação (4.3) no problema (4.1), omitindo as constantes, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla w) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ \lim\limits_{y\to 0} y^a w_y = -V(x)u + |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Motivado pela conta acima, estudaremos soluções do problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla v) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ \lim\limits_{y\to 0} y^a v_y = -V(x)v(x) + |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Se v resolve (4.4), então $u(x) = v(x,0)$ é solução de (4.1). Assim sendo, vamos à procura de uma solução positiva para (4.4) no espaço de Hilbert $X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, definido como o completamento de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$, com norma

$$\|v\|_{1,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a |\nabla v|^2 dX + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v(x,0)^2 dx\right)^{1/2}.$$

O produto interno associado a essa norma é dado por

$$\langle v, w\rangle_{1,s} = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla v \nabla w dX + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v(x,0) w(x,0) dx.$$

Suponha que w é solução de (4.4). Então

$$\lim_{y\to 0} y^a w_y \phi + V(x) w\phi = |w|^{p-1} w\phi,$$

com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Integrando ambos os membros da igualdade acima, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{y\to 0} y^a w_y \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p-1} w\phi dx.$$

Aplicando agora o Teorema de Green, obtem-se

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \operatorname{div}(y^a \nabla w)\phi dX + \int_{\mathbb{R}^{N+1}} y^a \nabla w \nabla \phi dX + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p-1} w\phi dx.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} y^a \nabla w \nabla \phi dX + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p-1} w\phi dx.$$

Dessa forma, relacionado ao problema (4.4), temos o funcional energia $I : X^{1,s} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a |\nabla w|^2 dX + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) w(x,0)^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w(x,0)|^{p+1} dx,$$

no qual é $C^1(X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+),\mathbb{R})$, com a derivada de Gateaux dada por

$$\begin{aligned} I'(w)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} y^a \nabla w \nabla \phi dX + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w(x,0)\phi(x,0)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |w(x,0)|^{p-1} w(x,0)\phi(x,0)dx, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Antes da demonstração do Teorema 4.1, provaremos alguns lemas.

Lema 4.1. *Dado $\delta > 0$, existe $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ que satisfaz a seguinte condição:*

$$||w||_{1,s} \geq \delta \quad \Rightarrow \quad I(w) \geq \alpha ||w||^2_{1,s}.$$

Demonstração. De fato, seja $w \in X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, com

$$||w||_{1,s} \geq \delta.$$

De (4.2), existe $C_{p+1} > 0$, tal que

$$\|w(x,0)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} := \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{p+1} \|w\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Em [3, Lema 2.2], temos

$$\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\sqrt{K_a}} \|E_a(w)\|_{1,s},$$

onde $E_a(w)$ denota a extensão de $w(x,0)$. Temos então

$$\|E_a(w)\|_{1,s} := \|w\|_{1,s}$$

(abusando da notação). Logo

$$\|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})^N} \leq K \|w\|_{1,s},$$

onde $K = C_{p+1}/\sqrt{K_a}$. Tome

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{K^{p+1}}{p+1} \delta^{p+1-2}.$$

Assim

$$\alpha \|w\|^2_{1,s} \leq \frac{1}{2} \|w\|^2_{1,s} - \frac{K^{p+1}}{p+1} \|w\|^{p+1}_{1,s} \leq \frac{1}{2} \|w\|^2_{1,s} - \frac{1}{p+1} \|w\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} = I(w).$$

□

Lema 4.2. *Existe $e_1 \in X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus B(0,\delta)$, com*

$$I(e_1) < 0.$$

Demonstração. Note que

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad I(tw) \to -\infty.$$

Portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| > \delta \quad \Rightarrow \quad I(tw) < 0.$$

Seja $w \in X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ não nulo. Tome

$$e_1 = tw$$

com $|t| > \delta$ e $|t| > (1/||w||_{1,s})\delta$. Então

$$\|e_1\|_{1,s} = \|tw\|_{1,s} = |t|\|w\|_{1,s} > \delta.$$

□

Lema 4.3. *Temos a positividade do chamado nível minimax:*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{\theta \in [0,1]} I(g(\theta)) > 0,$$

onde

$$\Gamma = \left\{ g \in C([0,1], X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)) : g(0) = 0 \quad e \quad g(1) = e_1 \right\}.$$

Sendo que a existência de e_1 é garantida pelo Lema 4.2.

Demonstração. Seja $\delta > 0$. Pelo Lema 4.1, existe $\alpha > 0$ satisfazendo

$$\inf_{\|w\|_{1,s} = \delta} I(w) \geq \alpha \|w\|^2_{1,s} = \alpha\delta^2 > max\left\{I(0), I(e_1)\right\} = 0.$$

Para cada $g \in \Gamma$ existe $\theta \in [0,1]$ tal que g(θ) $\in \partial B(0,\delta)$, pois g é contínua. Logo

$$I(g(\theta)) \geq \alpha\delta^2 \quad \Rightarrow \quad \max_{\theta \in [0,1]} I(g(\theta)) \geq \alpha\delta^2 \quad \Rightarrow \quad c \geq \alpha\delta^2 > 0.$$

□

4.2 Existência de Solução

Para provar do Teorema 4.1 obteremos uma sequência cujo limite é uma solução fraca do problema (4.4) e que mostraremos ser não nula. A existência da referida sequência será garantida pelo segunte teorema:

Teorema 4.2. *(Teorema do Passo da Montanha) Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que existam $u_0, u_1 \in X$, e uma vizinhança aberta limitada Ω de u_0 tal que $u_1 \in X \setminus \Omega$ e*

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi > \max\{\varphi(u_0), \varphi(u_1)\}.$$

Seja

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{\theta\in[0,1]} \varphi(g(\theta))$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = u_0 \quad e \quad g(1) = u_1\}.$$

Então, existe uma sequência (v_k) em X tal que

$$\varphi(v_k) \to c \quad em \quad \mathbb{R}, \quad e \quad \varphi'(v_k) \to 0 \quad em \quad X^*$$

e

$$c > \max\{\varphi(u_0), \varphi(u_1)\}.$$

Agora mostraremos o Teorema 4.1.

Prova do Teorema 4.1. Pelos Lemas 4.2 e 4.3 podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Então existe uma sequência (w_n) em $X^{1,s}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ tal que

$$I(w_n) \to c$$

e

$$I'(w_n) \to 0. \tag{4.5}$$

Para n suficientemente grande

$$|I(w_n) - c| \le 1$$

e

$$\|I'(w_n)\|_{(X^{1,s})^*} \le p + 1.$$

O que implica

$$1 + c \ge I(w_n)$$

e

$$I'(w_n)(-w_n) \le (p+1)\|w_n\|_{1,s}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + c + \|w_n\|_{1,s} &\ge \frac{1}{2}\|w_n\|_{1,s}^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1}\left(\|w_n\|_{1,s}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|w_n\|_{1,s}^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos concluir então que (w_n) é limitada em $X^{1,s}(\mathbb{R}_+^{N+1})^*$. De fato, caso contrário existiria n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$

$$\|w_n\|_{1,s} > c + 1$$

e

$$\|w_n\|_{1,s}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) - 1 > 1.$$

Portanto, para todo $n \geq n_0$

$$1+c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|w_n\|_{1,s}^2 - \|w_n\|_{1,s} = \|w_n\|_{1,s}\left((\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|w_n\|_{1,s} - 1\right) > 1+c.$$

Logo existe $M > 0$ tal que

$$\|w_n\|_{1,s} \leq M \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Uma vez que $X^{1,s}(\mathbb{R}_+^{N+1})$ é reflexivo, existe uma subsequência de (w_n) onde

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad X^{1,s}(\mathbb{R}_+^{N+1}).$$

Em [3], temos que

$$w_n(x,0) \to w(x,0) \quad \text{quase} \quad \text{sempre} \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N)$$

onde $2 \leq q < 2_s^*$. Assim

$$w_n \to w \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e existe $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|w_n(x,0)| \leq h(x), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Note que

$$w_n\varphi \to w\varphi, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|w_n(x,0)|^{p-1}w_n(x,0)\varphi(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}^N}|w(x,0)|^{p-1}w(x,0)\varphi(x,0)dx. \tag{4.8}$$

Observe que

$$\langle w_m, \varphi\rangle_{1,s} \to \langle w, \varphi\rangle_{1,s}, \tag{4.9}$$

com $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. De (4.5)

$$\langle w_m, \varphi\rangle_{1,s} - \int_{\mathbb{R}^N}|w_n(x,0)|^{p-1}w_n(x,0)\varphi(x,0)dx = 0. \tag{4.10}$$

Combinando (4.8), (4.9) e (4.10), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} y^a \nabla w \nabla \varphi dX + \int_{\mathbb{R}^N} \big(V(x)w(x,0)\varphi(x,0)dx - |w(x,0)|^{p-1}w(x,0)\varphi(x,0)dx\big) = 0.$$

Devemos mostrar que w é não nulo. Suponha o contrário. Pela desigualdade de interpolação, temos que

$$\|w\|_{p+1} \leq C\|w\|_2^{\theta}\|w\|_{2_s^*}^{1-\theta},$$

onde

$$\frac{1}{p+1} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2_s^*}$$

e C é uma constante positiva. Pela Desigualdade de Sobolev

$$\|w\|_{p+1} \leq C\|w\|_2^{\theta}\|w\|_{2_s^*}^{1-\theta} \leq C_1\|w\|_2^{\theta}\|w\|_{H^s}^{1-\theta} \leq C_2\|w\|_2^{\theta}\|w\|^{1-\theta}. \tag{4.11}$$

Para n suficientemente grande:

$$|I(w_n) - c| \leq \frac{c}{2(M+1)} \quad \Rightarrow \quad -I(w_n) + c \leq \frac{c}{2(M+1)}.$$

Organizando as contas

$$I(w_n) \geq \frac{-c}{2(M+1)} + c = \frac{-c + c2(M+1)}{2(M+1)} = \frac{c(2M+1)}{2(M+1)}. \tag{4.12}$$

Por outro lado, para n suficientemente grande

$$\|I'(w_n)\|_{(X^{1,s})^*} \leq \frac{c}{M+1}.$$

Assim

$$I'(w_n)\left(\frac{1}{2}w_n\right) \leq \frac{1}{2}\|w_n\|_{1,s}\frac{c}{M+1} \leq \frac{1}{2}M\frac{c}{M+1} = \frac{cM}{2(M+1)}. \tag{4.13}$$

De (4.13)

$$-\frac{1}{2}I'(w_n)w_n \geq \frac{-cM}{2(M+1)}. \tag{4.14}$$

Fazendo uso de (4.12) e(4.14)

$$I(w_n) - \frac{1}{2}I'(w_n)w_n \geq \frac{c(2M+1)}{2(M+1)} - \frac{c.M}{2(M+1)} = \frac{c(M+1)}{2(M+1)} = \frac{c}{2}. \tag{4.15}$$

De (4.15)

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} &\leq \frac{1}{2}\|w_n\|_{1,s}^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1}dx - \frac{1}{2}\left(\|w_n\|_{1,s}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1}dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|w_n\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por (4.7), (4.11) e (4.16), tem-se

$$\frac{c}{2} \leq C_3 \|w_n\|_2^\theta.$$

Prosseguindo com o cálculo:

$$\left(\frac{c}{2C_3}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \|w_n\|_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{c}{2C_3}\right)^{\frac{2}{\theta}} \leq \|w_n(x,0)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^2 dx.$$

Considere $\tilde{C} = (c/(2C_3))^{1/\theta}$. Dado $R > 0$, temos que

$$\tilde{C}^2 \leq \int_{B(0,R)} |w_n(x,0)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |w_n(x,0)|^2 dx.$$

Como (w_n) converge para $w = 0$, por hipótese, então para n suficientemente grande

$$\int_{B(0,R)} |w_n(x,0)|^2 dx \leq \left(\frac{\tilde{C}}{2}\right)^2.$$

Logo para n suficientemente grande, segue que

$$\frac{3}{4}\tilde{C}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |w_n(x,0)|^2 \frac{V(x)}{V(x)} dx \leq \frac{1}{\inf\limits_{|x| \geq R} V(x)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |w_n(x,0)|^2 V(x) dx.$$

Fazendo $R \to \infty$ na última desigualdade, então:

$$\frac{3}{4}\tilde{C}^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

O que é uma contradição. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.; Miyagaki, O. *Existence and concentration of solution for a class of fractional elliptic equation in* $\mathbb{R}^N$ *via penalization method*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016) 1–19.

[2] Brezis, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[3] Brändle, C.; Colorado, E.; Sánchez, U. *A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian*, Proc. Royal Soc. Edinburgh A. **143** (2013), 39–71.

[4] Cabré X.; Sire, Y. *Nonlinear equations for fractional Laplacians, I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **31** (2014), 23–53.

[5] Cabré X.; Sire, Y. *Nonlinear equations for fractional Laplacians II: Existence, uniqueness, and qualitative properties of solutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 911–941.

[6] Caffarelli, L. A.; Gutiérrez, C. E. *Properties of the solutions of the linearized Monge-Ampère equation. Amer. J. Math.* **119** (1997), 423-465.

[7] Caffarelli, L. A. *Further regularity for the Signorini problem.* Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 1067–1075.

[8] Caffarelli, L. A.; Silvestre, L. *An extension problem related to the fractional Laplacian.* Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), 1245-1260.

[9] Chang, X.; Wang, Z. Q. *Nodal and multiple solutions of nonlinear problems involving the fractional Laplacian*, J. Differential Equations **256** (2014), 2965–2992.

[10] Di Nezza, E.; Palatucci, G.; Valdinoci, E. *Hitchhikers guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), 521–573.

[11] Fabes, E. B.; Kenig, C. E.; Serapioni, R. P. *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 77-116.

[12] Fall, M. M.; Jarohs, S. *Overdetermined problems with fractional Laplacian*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **21** (2015), 924–938.

[13] Laskin, N. *Fractional quantum mechanics*, Phys. Rev. **62** (2000) 3135–3145.

[14] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[15] Schrödinger, E. Collected papers on wave mechanics, Third Edition, *AMS Chelsea Publishing*, 2003.

[16] Silvestre, L. *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*. Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 67–112.

[17] Zhang, J.; Liu, X.; Jiao, H. *Multiplicity of positive solutions for a fractional Laplacian equations involving critical nonlinearity* , arXiv:1502.02222 [math.AP]